



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Kasım 2007

Soru:

Negatif olmayan a, b, c gerçel sayıları $a + b + c = 5$ koşulunu sağlıyor. $a^4b + b^4c + c^4a$ ifadesinin alabileceği en büyük değer nedir?

Çözüm:

en büyük değer $(4, 1, 0)$, $(0, 4, 1)$ veya $(1, 0, 4)$ noktalarında 256 oluyor.

$f(x, y, z) = x^4y + y^4z + z^4x$ fanksiyonunu tanımlayalım. $a \geq b$ ve $a \geq c$ ise, $f(a + c/2, b + c/2, 0) \geq f(a, b, c)$ olduğunu ispatlayalım:

$$\begin{aligned} f(a + c/2, b + c/2, 0) &= (a + c/2)^4(b + c/2) \geq (a^4 + 2a^3c)(b + c/2) \geq a^4b + 2a^3bc + a^3c^2 \\ &\geq a^4b + b^4c + c^4a = f(a, b, c) \end{aligned}$$

Şimdi $a+b = 5$ durumunda $f(a, b, o)$ ifadesinin en büyük değerini aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğini kullanarak bulalım:

$$5 = a + b = (a/4 + a/4 + a/4 + a/4 + b) \geq 5 \times \sqrt[5]{a^4b \cdot 4^4}$$

Sonuç olarak $a^4b \leq 4^4$ elde ediyoruz. Eşitlik durumu : $a = 4, b = 1$. $(0, 4, 1)$ ve $(1, 0, 4)$ noktaları $b \geq a, b \geq c$ ve $c \geq a, c \geq b$ durumlarında elde ediliyor.