



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

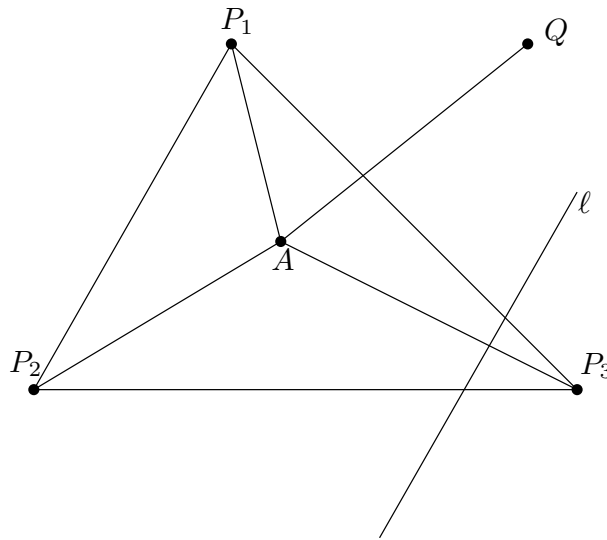
Eylül 2016

Soru:

Düzlemde 2016 nokta veriliyor. *Tüm nokta ikilileri* doğru parçalarıyla birleştirildikten sonra hiçbir diğer doğru parçasıyla uç noktaları dışında kesişmeyen doğru parçalarının sayısı en çok kaç olabilir?

Çözüm: Cevap: $2 \cdot 2016 - 2 = 4030$.

Hiçbir diğer doğru parçasıyla uç noktaları dışında kesişmeyen doğru parçalarına *özel* doğru parçası diyelim. $n \geq 4$ için özel doğru parçalarının sayısının en fazla $2n - 2$ olduğunu tümevarımla gösterelim. $n = 4$ durumu barizdir.



n nokta bir konveks n -genin köşeleriye sadece n tane özel doğru parçası vardır (n -genin kenarları) ve $n < 2n - 2$. Aksi taktirde bu n noktadan biri olan bir A noktası bu n noktanın konveks örtüsünün (convex hull) sınırı olmayacaktır. Kalan $n - 1$ noktanın bazı ikililerini tüm kapalı alanlar üçgen olacak şekilde birleştirelim. (triangulation).

A noktası bu üçgenlerinin birinin içinde bulunma zorundadır. Bu üçgen $P_1P_2P_3$ olsun. $P_1P_2P_3$ üçgeninin içinde kalan $n - 3$ noktadan A dışında başka nokta bulunmadığı açıktır. A noktasını atılırsa tümevarım varsayımına göre en fazla $2(n - 1) - 2 = 2n - 4$ özel doğru parçası olabilir. A yeniden yerleştirildiğinde sadece $[AP_1], [AP_2], [AP_3]$ özel doğru parçaları eklenebilir (bir köşesi A olan diğer doğru parçaları $P_1P_2P_3$ üçgeninin kenarlarından biri ile kesişiyorlar).

A noktası atıldıktan sonra $[P_1P_2], [P_1P_3], [P_2P_3]$ doğru parçalarının en az biri özel değilse bir ℓ doğru parçası $P_1P_2P_3$ üçgenini kesiyor (ℓ nin bir köşesi P_1, P_2 ve P_3 noktalarından biri olabilir). O zaman ℓ $[AP_1], [AP_2], [AP_3]$ doğru parçalarının en az birini kesecektir. Demek ki A yeniden yerleştirildiğinde $[AP_1], [AP_2], [AP_3]$ doğru parçalarından sadece ikisi özel olabiliyor ve özel doğru parça sayısı en fazla $2n - 4 + 2 = 2n - 2$ oluyor.

A noktası atıldıktan sonra $[P_1P_2], [P_1P_3], [P_2P_3]$ doğru parçalarının hepsi özel ise, A noktası yeniden yerleştirildiğinde $n > 4$ olduğu için $P_1P_2P_3$ üçgeninin dışında bir Q noktası bulunuyor ve $[AQ]$ $[P_1P_2], [P_1P_3], [P_2P_3]$ doğru parçalarının en az birini kesiyor ve dolayısıyla $[P_1P_2], [P_1P_3], [P_2P_3]$ doğru parçalarının en az biri özel olma özelliğini kaybediyor. Sonuç olarak yine özel doğru parça sayısı en fazla $2n - 4 + 2 = 2n - 2$ oluyor.

Şimde $2n - 2$ özel doğru parçasının olabileceğini gösterelim. Bir çember ve bu çember dışında bir A noktası alalım. A noktasından bu çembere çizilen teğetler çemberle X ve Y noktalarında kesişmiş olsun. Küçük XY yayı üzerinde herhangi $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ noktalarını alalım. O zaman $[A_1A_2], [A_2A_3], \dots, [A_{n-1}A_1], [AA_1], [AA_2], \dots, [AA_{n-1}]$ doğru parçalarının her biri özel doğru parçası olacaktır.

