



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Mayıs 2024

Soru:

$x_1, x_2, \dots, x_n$ gerçel sayılar olmak üzere,

$$\sum_{i,j=1,2,\dots,n, i \neq j} \lceil x_i x_j \rceil - (n-1) \left(\sum_{i=1,2,\dots,n} \lfloor x_i^2 \rfloor \right)$$

ifadesinin alabileceği en büyük değeri belirleyiniz.

Not: Bir x gerçel sayısı için, $\lceil x \rceil$ ile x sayısından küçük olmayan en küçük tam sayı, $\lfloor x \rfloor$ ile x sayısını aşmayan en büyük tam sayı gösteriliyor: $\lceil 1.8 \rceil = 2$, $\lfloor 2.4 \rfloor = 2$ ve $\lceil 3 \rceil = \lfloor 3 \rfloor = 3$.

Çözüm: Cevap: $n^2 - n + \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$.

Eşitlik durumuna bir örnek verelim: k bir tam sayı olmak üzere, $n = 2k$ ise sayılardan k tanesi 0.9 ve k tanesi 2.1, $n = 2k + 1$ ise sayılardan k tanesi 0.9 ve $k + 1$ tanesi 2.1.

Sorudaki ifadeyi

$$S = \sum_{i < j} (2\lceil x_i x_j \rceil - \lfloor x_i^2 \rfloor - \lfloor x_j^2 \rfloor)$$

olarak düzenleyelim. Her a, b reel sayı ikilisi için

$$2\lceil ab \rceil - \lfloor a^2 \rfloor - \lfloor b^2 \rfloor < 2ab + 2 - (a^2 - 1) - (b^2 - 1) = 4 - (a - b)^2 \leq 4$$

sağlanır ve eşitsizliğin sol tarafı tam sayı olduğundan dolayı $2\lceil ab \rceil - \lfloor a^2 \rfloor - \lfloor b^2 \rfloor \leq 3$ bulunur, $a = 1.2$ ve $b = 0.9$ gibi durumlarda ise eşitlik sağlanır. Ayrıca, eğer $\lfloor a^2 \rfloor - \lfloor b^2 \rfloor$ ifadesi çift ise, sol taraf çift bir sayı olacağı için bu durumda $2\lceil ab \rceil - \lfloor a^2 \rfloor - \lfloor b^2 \rfloor \leq 2$ elde edilir. $a = b$ ve ikisi sayı da kareleri tam sayı olmayacak şekilde alındığında ise eşitlik sağlanır.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ gerçel sayıları için, $\lfloor x_i^2 \rfloor$ ifadelerinden k tanesi çift, $l = n - k$ tanesi tek olsun. Bu durumda, S toplamında tüm ikililer bir kere geçtiği için, çift sayıların birlikte gruplandığı $\binom{k}{2}$ ifadenin ve tek sayıların birlikte gruplandığı $\binom{l}{2}$ ifadenin maksimum değeri 2 olacaktır. Bir çift, bir tek sayıdan oluşan kl ifadenin ise maksimum değeri 3 olacaktır. Buradan da

$$S \leq 3kl + k^2 - k + l^2 - l = (k + l)^2 + kl - k - l = n^2 - n + kl \leq n^2 - n + \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$$

elde edilir. Çözüm tamamlanmıştır.