



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Mart 2025

Soru:

600 kişinin katıldığı bir partide toplam 3300 el sıkışma gerçekleşti. Bu partide herhangi 300 kişi arasında gerçekleşen toplam el sıkışma sayısının en az N olduğu gözlemlendiyse, N sayısının alabileceği en büyük değer kaçtır?

Çözüm: Cevap: 750.

Önce $N = 750$ için bir örnek verelim. Öğrencileri 12 kişilik 50 gruba ayıralım el sıkışanlar sadece aynı grupta bulunan tüm kişi ikilileri olsun. yapsın. O zaman toplam $\binom{12}{2} \cdot 50 = 3300$ el sıkışması gerçekleşmiş olur. 300 kişiyi gruplardan $k_1, k_2, \dots, k_{50}$ kişi seçerek alırsak bu kişiler kendi aralarında

$$\binom{k_1}{2} + \dots + \binom{k_{50}}{2} = \frac{k_1^2 - k_1}{2} + \dots + \frac{k_{50}^2 - k_{50}}{2} = \frac{k_1^2 + \dots + k_{50}^2 - 750}{2}$$

maç yapmış olur. Karesel ortalama aritmetik ortalama eşitsizliğine göre,

$$\frac{k_1^2 + \dots + k_{50}^2 - 300}{2} \geq \frac{300^2/50 - 300}{2} = 750$$

elde edilir.

Şimdi de $N > 750$ için bir örnek bulunduğunu varsayalım. Kendi aralarında yaptıkları maç sayısı en az olan 300 kişilik grup A , kalan 300 kişinin oluşturduğu grup B olsun. $a \in A$ ve $b \in B$ olmak üzere, a nın A grubunda ve b nin A grubundaki öğrencilerle yaptıkları maç sayıları sırasıyla $f(a)$ ve $g(b)$ olsun. A kümesinin nin tanımın a göre, tüm (a, b) ikilileri için $f(a) \leq g(b)$ olur. Her $b \in B$ için $g(b) \geq 6$ ise, toplam maç sayısı en az $N + N + 6 \cdot 300 > 3300$ olur. Bir $b \in B$ kişisi için $g(b) \leq 5$ olsun. O zaman her $a \in A$ için $f(a) \leq 5$ ve buna göre de A da yapılan toplam maç sayısı en fazla $\frac{300 \cdot 5}{2} = 750$ olur, çelişki.