



Bilkent Üniversitesi
Matematik Bölümü

AYIN SORUSU

Mayıs 2025

Soru:

n bir pozitif tam sayı olmak üzere, n sayısını aşmayan ve n ile aralarında asal olan tüm pozitif tam sayıların kümesi S_n olsun. $f(n)$ sayısı, S_n kümesini birbirinden ayık $f(n)$ altkümeye, bu altkümelerin her birinin elemanları bir aritmetik dizi oluşturacak şekilde ayıramıyemeyi mümkün kılan en küçük pozitif tam sayı olarak tanımlanıyor. $a, b > 2025$, $a|b$ ve $f(a) \nmid f(b)$ koşullarını sağlayan sonsuz çoklukta (a, b) ikilisi bulunduğunu gösteriniz.

Çözüm:

Her $p > 1012$ asal sayısı için $(a, b) = (2p, 4p)$ ikilisinin koşulları sağladığını gösterelim.

S_{2p} kümesi $[1, 2p - 1]$ aralığında bulunan p hariç tüm tek sayılardan oluşuyor. $f(2p) > 1$ olduğu açıktır.

$$S_{2p} = \{1, 3, \dots, p - 2\} \cup \{p + 2, p + 4, \dots, 2p - 1\}$$

olduğundan $f(2p) = 2$ olur.

S_{4p} kümesi $[1, 4p - 1]$ aralığında bulunan p ve $3p$ hariç tüm tek sayılardan oluşuyor. $f(4p) > 2$ olduğu açıktır.

$$S_{4p} = \{1, 3, \dots, p - 2\} \cup \{p + 2, p + 4, \dots, 3p - 2\} \cup \{3p + 2, p + 4, \dots, 4p - 1\}$$

olduğundan $f(4p) = 3$ olur.

$2p \mid 4p$ ve $2 \nmid 3$ olduğuna göre, koşullar sağlanıyor.